

## Varianta 87

1. Fie  $z \in \mathbb{C}$  o rădăcină de ordin 3 a unității, diferită de 1. Să se calculeze  $1 + z + z^2$ .
2. Să se determine soluțiile întregi ale inecuației  $x^2 + x - 6 \leq 0$ .
3. Fie funcția  $f : (1, \infty) \rightarrow (2, \infty)$ ,  $f(x) = x^2 + 1$ . Să se arate că funcția  $f$  este bijectivă.
4. Câte numere naturale de la 1 la 100 sunt divizibile cu 6 și cu 8?
5. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care vectorii  $\vec{v}_1 = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$  și  $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 5\vec{j}$  sunt coliniari.
6. Triunghiul  $ABC$  are laturile  $AB = 3$ ,  $BC = 5$  și  $AC = 7$ . Să se calculeze lungimea razei cercului înscris în triunghiul  $ABC$ .

**1.** Fie matricea  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , care are toate elementele egale cu 1.

**a)** Să se demonstreze că  $A^2 = 3A$ .

**b)** Să se calculeze  $\det(I_3 + A^3)$ .

**c)** Să se demonstreze că dacă  $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  este o matrice cu proprietatea  $AB = BA$ , atunci suma elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană ale lui  $B$  este aceeași.

**2.** Fie  $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  și  $\mathbb{Q}(\varepsilon) = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

**a)** Să se arate că  $\varepsilon^2 \in \mathbb{Q}(\varepsilon)$ .

**b)** Să se demonstreze că inversul oricărui element nenul din  $\mathbb{Q}(\varepsilon)$  aparține mulțimii  $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ .

**c)** Să se arate că mulțimea  $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  este parte stabilă a lui  $\mathbb{Z}$  în raport cu înmulțirea.

1. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ .

a) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare.

b) Să se studieze convergența șirului  $(x_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $x_1 = 1$  și  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

c) Să se demonstreze că  $f(x+1) - f(x) \leq 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

2. Se consideră funcțiile  $f, g : (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{3-x}$  și  $g(x) = \frac{\ln(3-x)}{x}$ ,  $\forall x \in (0, 3)$ .

a) Să se calculeze  $\int_1^e (3-x) f(x) dx$ .

b) Să se arate că  $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 g(x) dx$ .

c) Să se arate că  $\lim_{t \searrow 0} \int_t^1 f(x) dx = +\infty$ .